Differenciálás alkalmazásai II
Szélső érték keresés, Taylor polinom

Nagy Noémi

Farkas Lóránt és Sáfár Orsolya munkája alapján

2022/2023 ősz

Folytonos függvény globális szélsőértékeinek keresése korlátos, zárt intervallumon

Definíció

Legyen f értelmezve a H halmazon. Az f függvénynek a H halmazon globális vagy abszolút szélsőértéke van az $x_0 \in H$ pontban, ha a $R(f|_H)$ értékkészletnek $f(x_0)$ a legkisebb vagy legnagyobb eleme (globális minimum vagy globális maximum).

Tétel (Weierstrass)

Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van globális minimum- és globális maximumhelye.

Ezen x_0 globális szélsőérték helyek a következő helyeken lehetnek:

1. ahol a függvény deriválható és x_0 lokális szélsőértékhely,
2. ahol a függvény nem deriválható,
3. az intervallum végpontjaiban.

Végül a szóbajövő helyek közül kell kiválasztani a legnagyobb és a legkisebb függvényértékűt.

Példa

Sok gyakorlati eset vezethető vissza szélsőérték keresésre egy korlátos, zárt intervallumon.

Példa

Sok gyakorlati eset vezethető vissza szélsőérték keresésre egy korlátos, zárt intervallumon.

Például: Legalább mekkora a felülete egy 1 literes konzervdoboznak? Az alapkörének sugara legyen 1cm-nél nagyobb és ne legyen 1m-nél hosszabb (praktikus megfontolásokból).

Példa

Sok gyakorlati eset vezethető vissza szélsőérték keresésre egy korlátos, zárt intervallumon.

Például: Legalább mekkora a felülete egy 1 literes konzervdoboznak? Az alapkörének sugara legyen 1cm-nél nagyobb és ne legyen 1m-nél hosszabb (praktikus megfontolásokból).

Ha a konzervdoboznak $1 \leq r \leq 100$ (cm) sugara és M (cm) magassága van, akkor tudjuk, hogy a térfogat $V = r^2\pi M = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$ $(*)$.

Példa

Sok gyakorlati eset vezethető vissza szélsőérték keresésre egy korlátos, zárt intervallumon.

Például: Legalább mekkora a felülete egy 1 literes konzervdoboznak? Az alapkörének sugara legyen 1cm-nél nagyobb és ne legyen 1m-nél hosszabb (praktikus megfontolásokból).

Ha a konzervdoboznak $1 \leq r \leq 100$ (cm) sugara és M (cm) magassága van, akkor tudjuk, hogy a térfogat $V = r^2\pi M = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$ $(*)$.

A konzervdoboz felülete $A = 2r^2\pi + 2r\pi M$, ennek a minimális értékét szeretnénk megkapni!

Példa

Sok gyakorlati eset vezethető vissza szélsőérték keresésre egy korlátos, zárt intervallumon.

Például: Legalább mekkora a felülete egy 1 literes konzervdoboznak? Az alapkörének sugara legyen 1cm-nél nagyobb és ne legyen 1m-nél hosszabb (praktikus megfontolásokból).

Ha a konzervdoboznak $1 \leq r \leq 100$ (cm) sugara és M (cm) magassága van, akkor tudjuk, hogy a térfogat $V = r^2\pi M = 1\ dm^3 = 1000\ cm^3$ $(*)$.

A konzervdoboz felülete $A = 2r^2\pi + 2r\pi M$, ennek a minimális értékét szeretnénk megkapni!

$(*)$-ból: $M = \frac{1000}{r^2\pi}$, ezt behelyettesítve a felület képletébe, kapjuk

$$A(r) = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{1000}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2000}{r}$$

(folytonos, deriválható) függvényt, amit minimalizálni szeretnénk az $1 \leq r \leq 100$ korlátos, zárt intervallumon.

Példa

Weierstrass tétele miatt az A folytonos függvénynek van abszolút minimuma $I = [1,100]$-n.

Példa

Weierstrass tétele miatt az A folytonos függvénynek van abszolút minimuma $I = [1,100]$-n.

Mivel A differenciálható, így a munimumhely vagy az I intervallum végpontjaiban, vagy egy lokális szélsőértékhelynél van.

Példa

Weierstrass tétele miatt az A folytonos függvénynek van abszolút minimuma $I = [1{,}100]$-n.

Mivel A differenciálható, így a munimumhely vagy az I intervallum végpontjaiban, vagy egy lokális szélsőértékhelynél van.

Tudjuk, hogy ott lehet A-nak lokális szélsőértéke, ahol a deriválja nulla.

Példa

Weierstrass tétele miatt az A folytonos függvénynek van abszolút minimuma $I = [1{,}100]$-n.

Mivel A differenciálható, így a munimumhely vagy az I intervallum végpontjaiban, vagy egy lokális szélsőértékhelynél van.

Tudjuk, hogy ott lehet A-nak lokális szélsőértéke, ahol a deriválja nulla.

Keressük meg A' zérushelyeit:

$$A'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r \approx 5{,}42 \in I$$

Példa

Weierstrass tétele miatt az A folytonos függvénynek van abszolút minimuma $I = [1{,}100]$-n.

Mivel A differenciálható, így a munimumhely vagy az I intervallum végpontjaiban, vagy egy lokális szélsőértékhelynél van.

Tudjuk, hogy ott lehet A-nak lokális szélsőértéke, ahol a deriválja nulla.

Keressük meg A' zérushelyeit:

$$A'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r \approx 5{,}42 \in I$$

Tehát a lehetséges globális szélsőértékhelyek: $r = 1$, $r = 100$, $r = 5{,}42$.

Példa

Weierstrass tétele miatt az A folytonos függvénynek van abszolút minimuma $I = [1{,}100]$-n.

Mivel A differenciálható, így a munimumhely vagy az I intervallum végpontjaiban, vagy egy lokális szélsőértékhelynél van.

Tudjuk, hogy ott lehet A-nak lokális szélsőértéke, ahol a deriválja nulla.

Keressük meg A' zérushelyeit:

$$A'(r) = 4r\pi - \frac{2000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{2000}{4\pi} \Rightarrow r \approx 5{,}42 \in I$$

Tehát a lehetséges globális szélsőértékhelyek: $r = 1$, $r = 100$, $r = 5{,}42$.

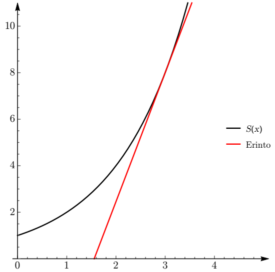
Ezek közül kell kiválasztani a legkisebb és legnagyobb függvényértékűt!

Ha $r = 1$, akkor $A(1) = (2\pi + 2000)cm^2 \approx 2006cm^2$

Ha $r = 100$, akkor $A(100) = (20000\pi + 20)cm^2 \approx 62851cm^2$

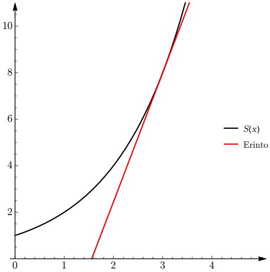
Ha $r = 5{,}42$, akkor $A(5{,}42) \approx 553cm^2 \Rightarrow$ globális minimum hely és érték.

Háttér



Láttuk, hogy az érintő egész jól közelíti a függvényt az érintési pont környékén.

Háttér

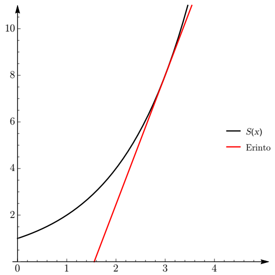


Láttuk, hogy az érintő egész jól közelíti a függvényt az érintési pont környékén.

Ez azért van mert az $l(x)$ egyenesre, azaz az érintőre, amivel közelítjük az $f(x)$-et igaz, hogy

$$f(x_0) = l(x_0), \quad f'(x_0) = l'(x_0)$$

Háttér



Láttuk, hogy az érintő egész jól közelíti a függvényt az érintési pont környékén.

Ez azért van mert az $l(x)$ egyenesre, azaz az érintőre, amivel közelítjük az $f(x)$-et igaz, hogy

$$f(x_0) = l(x_0), \quad f'(x_0) = l'(x_0)$$

Vajon tudjuk-e ezt a dolgot általánosítani?

Példa

Adjunk olyan n-edfokú polinomot, aminek az első n deriváltja az x_0-ban ugyanaz, mint az eredeti függvénynek!

Példa

Adjunk olyan n-edfokú polinomot, aminek az első n deriváltja az x_0-ban ugyanaz, mint az eredeti függvénynek!

Ezt a polinomot fogjuk az f függvény x_0 középpontú n-edfokú Taylor-polinomjának hívni!

Példa

Adjunk olyan n-edfokú polinomot, aminek az első n deriváltja az x_0-ban ugyanaz, mint az eredeti függvénynek!

Ezt a polinomot fogjuk az f függvény x_0 középpontú n-edfokú Taylor-polinomjának hívni!

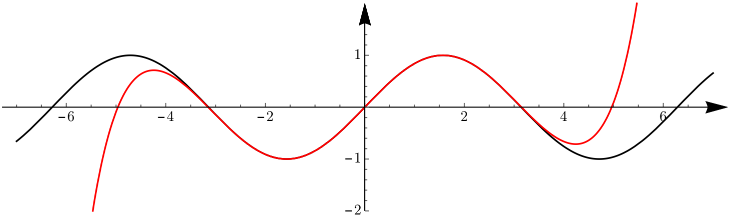
Például közelíthetjük $x_0 = 0$-ban az $f(x) = \sin(x)$ függvényt a $T_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ Taylor-polinommal. Belátható, hogy $f(0) = T_9(0)$, $f'(0) = T_9'(0)$, …, $f^{(9)}(0) = T_9^{(9)}(0)$.

Példa

Adjunk olyan n-edfokú polinomot, aminek az első n deriváltja az x_0-ban ugyanaz, mint az eredeti függvénynek!

Ezt a polinomot fogjuk az f függvény x_0 középpontú n-edfokú Taylor-polinomjának hívni!

Például közelíthetjük $x_0 = 0$-ban az $f(x) = \sin(x)$ függvényt a $T_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$ Taylor-polinommal. Belátható, hogy $f(0) = T_9(0)$, $f'(0) = T_9'(0)$, …, $f^{(9)}(0) = T_9^{(9)}(0)$.



Taylor-polinom definíciója

Egy n-szer differenciálható függvény n-edfokú Taylor polinomja az x_0 középponttal:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Taylor-polinom definíciója

Egy n-szer differenciálható függvény n-edfokú Taylor polinomja az x_0 középponttal:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Az első néhány tagja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Taylor-polinom definíciója

Egy n-szer differenciálható függvény n-edfokú Taylor polinomja az x_0 középponttal:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Az első néhány tagja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

Belátható, hogy az első n derivált megegyezik a függvény megfelelő deriváltjaival az x_0 pontban.

Példa: $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0,\ n = 9$

Legyen $f(x) = \sin(x)$, adjuk meg az $x_0 = 0$ középpontú 9-edfokú Taylor-polinomját!

Példa: $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0,\ n = 9$

Legyen $f(x) = \sin(x)$, adjuk meg az $x_0 = 0$ középpontú 9-edfokú Taylor-polinomját!

A Taylor-polinom definíciója alapján:

$$T_9(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9.$$

Példa: $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0,\ n = 9$

Legyen $f(x) = \sin(x)$, adjuk meg az $x_0 = 0$ középpontú 9-edfokú Taylor-polinomját!

A Taylor-polinom definíciója alapján:

$$T_9(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9.$$

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra a $x_0 = 0$ helyen, $n = 0,1,\ldots,9$.

Példa: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 9$

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra a $x_0 = 0$ helyen, $n = 0,1,\ldots,9$.

Példa: $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0,\ n = 9$

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra a $x_0 = 0$ helyen, $n = 0,1,\ldots,9$.

$$
\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) = \sin x & &\Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(1)}(x) &= f'(x) = \cos x & &\Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1\\
f^{(2)}(x) &= f''(x) = -\sin x & &\Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1\\
f^{(6)}(x) &= -\sin x & &\Rightarrow f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(7)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f^{(7)}(0) = -\cos 0 = -1\\
f^{(8)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(8)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(9)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(9)}(0) = \cos 0 = 1
\end{aligned}
$$

Példa: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 9$

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra a $x_0 = 0$ helyen, $n = 0,1,\ldots,9$.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) = \sin x & &\Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(1)}(x) &= f'(x) = \cos x & &\Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1\\
f^{(2)}(x) &= f''(x) = -\sin x & &\Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1\\
f^{(6)}(x) &= -\sin x & &\Rightarrow f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(7)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f^{(7)}(0) = -\cos 0 = -1\\
f^{(8)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(8)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(9)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(9)}(0) = \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

Így a Taylor-polinom:

$$T_9(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Példa: $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0,\ n = 9$

Szükségünk van az $f^{(n)}$ deriváltakra a $x_0 = 0$ helyen, $n = 0,1,\ldots,9$.

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= f(x) = \sin x & &\Rightarrow f(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(1)}(x) &= f'(x) = \cos x & &\Rightarrow f'(0) = \cos 0 = 1\\
f^{(2)}(x) &= f''(x) = -\sin x & &\Rightarrow f''(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(3)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f^{(3)}(0) = -\cos 0 = -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(4)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(5)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(5)}(0) = \cos 0 = 1\\
f^{(6)}(x) &= -\sin x & &\Rightarrow f^{(6)}(0) = -\sin 0 = 0\\
f^{(7)}(x) &= -\cos x & &\Rightarrow f^{(7)}(0) = -\cos 0 = -1\\
f^{(8)}(x) &= \sin x & &\Rightarrow f^{(8)}(0) = \sin 0 = 0\\
f^{(9)}(x) &= \cos x & &\Rightarrow f^{(9)}(0) = \cos 0 = 1
\end{aligned}$$

Így a Taylor-polinom:

$$T_9(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}.$$

Észrevétel: mivel $f^{(10)}(0) = -\sin(0) = 0$, így $T_9(x) = T_{10}(x)$.

A maradéktag

Vajon mennyire jól közelíti a Taylor-polinom a függvényt?

A maradéktag

Vajon mennyire jól közelíti a Taylor-polinom a függvényt?

Az $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ maradéktagra igaz a következő állítás:

Tétel (Lagrange-féle maradéktag)

Ha f $(n+1)$-szer differenciálható $[x_0,x]$-en (vagy $[x,x_0]$-on), akkor létezik olyan c szám x és x_0 között, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

A maradéktag

Vajon mennyire jól közelíti a Taylor-polinom a függvényt?

Az $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$ maradéktagra igaz a következő állítás:

Tétel (Lagrange-féle maradéktag)

Ha f $(n+1)$-szer differenciálható $[x_0,x]$-en (vagy $[x,x_0]$-on), akkor létezik olyan c szám x és x_0 között, melyre

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Látható, hogy ha az $(n+1)$-edik derivált korlátos, akkor remekül lehet becsülni a hibát.

Példa hibabecslésre: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 9$

Adjunk hibabecslést az előbbi közelítésre az $x = \frac{\pi}{2}$-ben:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = T_9(x)$$

Példa hibabecslésre: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 9$

Adjunk hibabecslést az előbbi közelítésre az $x = \frac{\pi}{2}$-ben:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = T_9(x)$$

Tudjuk, hogy a maradéktagra és valamely c számra 0 és x között fennáll:

$$f(x) - T_9(x) = R_9(x) = \frac{f^{(10)}(c)}{10!} x^{10}.$$

Példa hibabecslésre: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 9$

Adjunk hibabecslést az előbbi közelítésre az $x = \frac{\pi}{2}$-ben:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = T_9(x)$$

Tudjuk, hogy a maradéktagra és valamely c számra 0 és x között fennáll:

$$f(x) - T_9(x) = R_9(x) = \frac{f^{(10)}(c)}{10!} x^{10}.$$

Mivel $f^{(10)}(x) = -\sin(x)$ és $|-\sin(c)| \leq 1$, ezért:

$$\left|R_9\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{10!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \approx 0{,}000025$$

Példa hibabecslésre: $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$, $n = 9$

Adjunk hibabecslést az előbbi közelítésre az $x = \frac{\pi}{2}$-ben:

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = T_9(x)$$

Tudjuk, hogy a maradéktagra és valamely c számra 0 és x között fennáll:

$$f(x) - T_9(x) = R_9(x) = \frac{f^{(10)}(c)}{10!}x^{10}.$$

Mivel $f^{(10)}(x) = -\sin(x)$ és $|-\sin(c)| \leq 1$, ezért:

$$\left|R_9\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{10!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{10} \approx 0{,}000025$$

Tehát $\sin(\frac{\pi}{2}) \approx T_9(\frac{\pi}{2}) \approx 1{,}00000354$. Persze tudjuk, hogy $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Így a valódi hibára: $|\sin(\frac{\pi}{2}) - T_9(\frac{\pi}{2})| \approx 0{,}00000354 \leq 0{,}000025$ tényleg teljesül.